Ueber eine

Verallgemeinerung des Satzes, dass das zwischen den Asymptoten gelegene Stück einer Hyperbel-Tangente im Berührungspunkt halbirt wird.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doctorwürde

bei

hochlöblicher philosophischer Facultät zu Marburg

eingereicht

von

Emil Schulte

aus Hagen.

Marburg.

Universitäts-Buchdruckerei (R. Friedrich).

1881.

Herrn

Professor Dr. von Drach

in

dankbarer Verehrung.

Der auf dem Titel genannte Satz war den Geometern des Alterthums bekannt und findet sich als dritter Lehrsatz im zweiten Buch des Apollonius von Perga über die Kegelschnitte, der ihn, wie folgt, aussprach: »Wenn eine grade Linie eine Hyperbel berührt, so schneidet sie beide Asymptoten und ihr Berührungspunkt ist die Mitte des Stücks zwischen den Asymptoten; das Quadrat ihrer Hälfte aber ist gleich dem vierten Theil des zum Durchmesser nach dem Berührungspunkt gehörigen Rechtecks«.

Halbirt man mithin die zwischen den Asymptoten gelegenen Abschnitte sämmtlicher Tangenten einer Hyperbel, so liegen die Halbirungspunkte auf der Hyperbel. Man kann sich nun die Frage vorlegen, wie der Ort dieser Theilpunkte der Tangenten in dem allgemeinern Falle beschaffen sein möge, wenn die Theilung in einem beliebigen constanten Verhältnisse $1:\lambda$ vorgenommen wird, so dass, wenn R, S die Durchschnittspunkte der Tangente mit dem Asymptoten und M der Theilungspunkt von RS ist, das constante Verhältniss

$$RS:MS=\lambda$$

besteht. Hierbei wird es auch zulässig sein, λ negativ anzunehmen, wobei dann der Theilpunkt M ausserhalb der Strecke RS fällt. Sind die Axen der Hyperbel 2a und 2b, so lautet ihre Asymptotengleichung

$$xy=\frac{a^2+b^2}{4}.$$

Eine Tangente im Punkte xy schneidet die Asymptoten in Punkten, deren Coordinaten $2x, 0$ und $0, \frac{a^2+b^2}{2x}$ sind. Der Punkt ξ, η, der die Verbindungslinie dieser beiden Schnittpunkte im Verhältniss $1:\lambda$ theilt, hat also die Coordinaten

$$\xi=\frac{2x}{1+\lambda},\ \eta=\frac{\lambda\frac{a^2+b^2}{2x}}{1+\lambda}$$ und die

Gleichung seines Ortes wird durch Elimination von x aus diesen Ausdrücken gefunden, nämlich

$$\xi\eta=\frac{a^2+b^2}{4}\frac{4\lambda}{(1+\lambda)^2}.$$

Diese Gleichung lässt sofort erkennen, dass der Ort der Theilpunkte wieder eine Hyperbel mit denselben Asymptoten und gleichgerichteten Axen ist, und zwar sind bezüglich der Realität für ein positives λ die Axen ebenso gelegen, wie bei der gegebenen Hyperbel, bei negativem λ dagegen umgekehrt, so dass also die Länge der reellen Halbaxe beträgt $\frac{2a\sqrt{\lambda}}{1+\lambda}$ und die der imaginären $\frac{2b\sqrt{\lambda}}{1+\lambda}$ für ein positives λ, für ein negatives λ hingegen $\frac{2a\sqrt{\lambda}}{1+\lambda}$ Nebenaxe und $\frac{2b\sqrt{\lambda}}{1+\lambda}$ Hauptaxe ist. Für $\lambda = 1$ erhält man die ursprüngliche Hyperbel, für $\lambda = -1$ ergibt sich $xy = \infty$, eine Gleichung, welche als die einer unendlich entfernten Hyperbel aufzufassen ist. Offenbar ist $\frac{4\lambda}{(1+\lambda)^2}$ für jedes positive λ, welches grösser als 1 ist, kleiner als 1. Je grösser man also λ nimmt, desto kleiner sind die Axen der entstehenden Hyperbeln, für $\lambda = \infty$ erhält man das Asymptotenkreuz. Soll $\frac{4\lambda}{(1+\lambda)^2}$ grösser als 1 werden und positiv bleiben, so ergeben sich für λ nur imaginäre Werthe, und keine Hyperbel mit grösserer reeller Axe als a kann anders als durch imaginäre Theilung dargestellt werden.

War hiernach der Satz des Apollonius der Verallgemeinerung fähig, dass man, statt die bewegliche Tangente zu halbiren, dieselbe in einem beliebigen Verhältniss theilte, so gewinnt derselbe eine noch grössere Allgemeinheit, wenn die Hyperbel durch einen beliebigen Kegelschnitt, die Asymptoten durch irgend ein Tangentenpaar desselben ersetzt werden. Eine derartige Erweiterung des Satzes finden wir in der analytischen Geometrie der Kegelschnitte von Salmon (deutsche Ausgabe von Fiedler, in der dritten Auflage Artikel 421 Nr. 8): »Der Ort des Punktes, in welchem der von zwei festen Tangenten eines Kegelschnitts in einer veränderlichen Tangente desselben bestimmte Abschnitt in einem gegebenen Verhältniss getheilt wird, ist eine Hyperbel, deren Asymptoten den festen Tangenten parallel sind.« Es wird daselbst*) auch eine Gleichung der letzteren angegeben für den Fall, dass

$$\xi_1 \xi_3 = \varkappa^2 \xi_2^2$$

die des gegebenen Kegelschnitts ist, deren Herleitung auf folgende Weise bewerkstelligt werden kann: Die Gleichungen dreier Punkte 1, 2, 3 der Ebene in der Normalform mögen lauten:

$$\xi_1 \equiv u x_1 + v y_1 + 1 = 0$$
$$\xi_2 \equiv u x_2 + v y_2 + 1 = 0$$
$$\xi_3 \equiv u x_3 + v y_3 + 1 = 0$$

Die obige Gleichung $\xi_1 \xi_3 = \varkappa^2 \xi_2^2$ stellt dann einen Kegelschnitt dar, der durch 1 und 3 geht, während 2 der Pol zur Verbindungslinie 13 ist; so dass also die Geraden 21 und 23 Tangenten sind mit 1 resp. 3 als Berührungspunkten. Die Gleichung des Berührungspunktes einer Tangente, welche die Punkte T_1 auf 12 und T_3 auf 23, deren Gleichungen beziehungsweise lauten $\mu \xi_1 - \varkappa \xi_2 = 0$ und $\mu \varkappa \xi_2 - \xi_3 = 0$, verbindet, stellt sich dann dar in der Form:

$$\mu^2 \xi_1 - 2 \mu \varkappa \xi_2 + \xi_3 = 0$$

*) Art. 319. Aufg. 2 und 3.

Setzt man in die Gleichungen für T_1 und T_3 die Werthe für ξ_1, ξ_2, ξ_3 ein, so erhält man

für $T_1: u(\mu x_1 - \varkappa x_2) + v(y_1 - \varkappa y_2) + \mu - \varkappa = 0$

für $T_2: u(\mu \varkappa x_2 - x_3) + v(\mu \varkappa y_2 - y_3) + \mu \varkappa - 1 = 0$

also durch Reduction auf die Normalform

$$\text{für } T_1: \frac{\mu \xi_1 - \varkappa \xi_2}{\mu - \varkappa} = 0$$

$$\text{für } T_3: \frac{\mu \varkappa \xi_2 - \xi_3}{\mu \varkappa - 1} = 0$$

und die Gleichung des Punktes, der die Verbindungslinie von T_1 und T_3 im Verhältniss $m:n$ theilt, lautet dann

$$\frac{\mu \xi_1 - \varkappa \xi_2}{\mu - \varkappa} : \frac{\mu \varkappa \xi_2 - \xi_3}{\mu \varkappa - 1} = -(m:n)$$

oder nach μ geordnet

$$\mu^2 (n \xi_1 + m \xi_2) \varkappa - \mu \left\{ n \xi_1 + m \xi_3 + (m+n) \varkappa^2 \xi_2 \right\} + (n \xi_2 + m \xi_3) \varkappa = 0.$$

Demnach hat der Punkt die Gleichung

$$\mu^2 U_1 - 2 \mu U_2 + U_3 = 0$$

wo $U_1 \equiv 2 \varkappa (n \xi_1 + m \xi_2)$

$U_2 \equiv n \xi_1 + m \xi_3 + (m+n) \varkappa^2 \xi_2$

$U_3 \equiv 2 \varkappa (n \xi_2 + m \xi_3)$

Die Gleichung für den Ort des Theilpunktes lässt sich also leicht angeben und lautet wie bei Salmon (Art. 319, Aufg. 3)

$$4 \varkappa^2 (n \xi_1 + m \xi_2)(n \xi_2 + m \xi_3) = \left\{ n \xi_1 + m \xi_3 + (m+n) \varkappa^2 \xi_2 \right\}^2$$

Das Fundamentaldreieck dieses Kegelschnitts steht nun zu dem Fundamentaldreieck des gegebenen in einer einfachen Lagenbeziehung, die zunächst ermittelt werden soll. Setzt man in die identischen Gleichungen

$U_1 \equiv 2 \varkappa (n \xi_1 + m \xi_2)$

$U_2 \equiv n \xi_1 + m \xi_3 + (m+n) \varkappa^2 \xi_2$

$U_3 \equiv 2 \varkappa (n \xi_2 + m \xi_3)$

für ξ_1, ξ_2, ξ_3 die Werthe ein, so erhält man

$U_1 \equiv u(n x_1 + m x_2) + v(n y_1 + m y_2) + (m+n) = 0$

$U_2 \equiv u(n x_1 + m x_3 + (m+n) \varkappa^2 x_2) + v(n y_1 + m y_3 + (m+n) \varkappa^2 y_2) + (m+n) + (m+n) \varkappa^2 = 0$

$U_3 \equiv u(n x_2 + m x_3) + v(n y_2 + m y_3) + (m+n) = 0$

Daraus ergeben sich die Normalformen der Gleichungen dieser Punkte der Reihe nach wie folgt

$$\frac{n \xi_1 + m \xi_2}{m+n} = 0$$

$$\frac{\frac{n \xi_1 + m \xi_3}{m+n} + \varkappa^2 \xi_2}{1 + \varkappa^2} = 0$$

$$\frac{n \xi_2 + m \xi_3}{m+n} = 0$$

Der Punkt U_1 liegt also auf *12* und theilt diese Seite im Verhältniss $m:n$, der Punkt U_3 hingegen auf *32* und theilt im Verhältniss $n:m$; endlich bewegt sich der Punkt U_2 auf einer Graden, die durch *2* und den Punkt auf *13* geht, der *13* im Verhältniss $m:n$ theilt. Da nun in den Gleichungen für U_1 und U_3 x^2 nicht vorkommt, so gehen bei gleichbleibender Theilung sämmtliche entstehende Kegelschnitte, welcher besondern Art auch der erzeugende Kegelschnitt sein möge, durch zwei feste Punkte in den Seiten des ursprünglichen Fundamentaldreiecks. Es würde nun nicht ohne Interesse sein, Beziehungen zwischen dem erzeugenden und erzeugten Kegelschnitt aufzusuchen, was jedoch nicht ausführbar ist, wenn nicht die Gleichungen beider in rechtwinkligen Coordinaten bekannt sind.

Aus der gefundenen Gleichung des Kegelschnitts könnte man durch Transformation seine Gleichung in Cartesischen Coordinaten herleiten. Doch kann man auch letztere mit nicht grösserem Aufwand sofort erhalten. Sind die rechtwinkligen Coordinaten dreier Punkte $x_1 y_1$, $x_2 y_2$, $x_3 y_3$ und theilt man $\overline{12}$ im Verhältniss $1:\lambda_1$, $\overline{32}$ im Verhältniss $1:\lambda_3$ dann sind die Coordinaten der erhaltenen Theilpunkte

$$\xi_1 = \frac{x_2 - \lambda_1 x_1}{1-\lambda_1},\ \eta_1 = \frac{y_2 - \lambda_1 y_1}{1-\lambda_1}$$

$$\xi_3 = \frac{x_2 - \lambda_3 x_3}{1-\lambda_3},\ \eta_3 = \frac{y_2 - \lambda_3 y_3}{1-\lambda_3},$$

Wenn nun zwischen λ_1 und λ_3 die projectivische Beziehung vermittelst der Gleichung

$$A\lambda_1\lambda_3 + B\lambda_1 + C\lambda_3 + D = 0$$

hergestellt wird, so beschreibt die Verbindungslinie der beiden Theilpunkte als Tangente einen Kegelschnitt.

Soll für denselben $\overline{13}$ Polare zu *2*, werden

so muss für $\lambda_1 = 0 \quad \lambda_3 = \infty$

und für $\lambda_3 = 0 \quad \lambda_1 = \infty$ sein

woraus $B = C = 0$ folgt, so dass also die obige Gleichung sich vereinfacht in

$$\lambda_1\lambda_3 = -\frac{D}{A} = const = d$$

Um nun auf unsere Aufgabe zu kommen, so ist die Strecke zwischen $\xi_1\eta_1$ und $\xi_3\eta_3$ im Verhältniss $m:n$ zu theilen. Als Coordinaten des erhaltenen Theilpunktes hat man dann

$$x = \frac{m\xi_1 + n\xi_3}{m+n}$$

$$y = \frac{m\eta_1 + n\eta_3}{m+n}$$

oder nach Einführung der Werthe von ξ_1, η_1, ξ_3, η_3 und λ_3

$$x = \frac{\lambda_1^2(mx_1 + nx_2) - \lambda_1\left[(m+n)x_2 + d(mx_1 + nx_3)\right] + d(mx_2 + nx_3)}{(m+n)\left[\lambda_1^2 - \lambda_1(1+d) + d\right]}$$

$$y = \frac{\lambda_1^2 (m y_1 + n y_2) - \lambda_1 \left[(m+n) y_2 + d (m y_1 + n y_3)\right] + d (m y_2 + n y_3)}{(m+n)\left[\lambda_1^2 - \lambda_1 (1+d) + d\right]}$$

Durch Elimination von λ_1 erhält man die Gleichung des Orts für x, y. Zur Vereinfachung derselben machen wir die Annahmen

$$x_1 = o \quad y_1 = b$$
$$x_2 = a \quad y_2 = o$$
$$x_3 = o \quad y_3 = c$$

und erhalten dadurch zunächst, indem zugleich λ für λ_1 geschrieben wird,

$$x = \frac{\lambda^2 n a - \lambda (m+n) a + d m a}{(m+n)\left[\lambda^2 - \lambda (1+d) + d\right]}$$

$$y = \frac{\lambda^2 m b - \lambda d (m b + n c) + d n c}{(m+n)\left[\lambda^2 - \lambda (1+d) + d\right]}$$

oder nach λ geordnet

$$\lambda^2 \left[(m+n) x - n a\right] - \lambda \left[(m+n)(1+d) x - (m+n) a\right] + (m+n) d x - d m a = o$$

$$\lambda^2 \left[(m+n) y - m b\right] - \lambda \left[(m+n)(1+d) y - d (m b + n c)\right] + (m+n) d y - d n c = o$$

hieraus fliesst als Eliminationsresultat bekanntlich (Vgl. z. B. Salmon, Algebra p. 80) die Determinante

$$\begin{vmatrix} (m+n) x - n a & , & 0 & , \\ -(m+n)(1+d) x + (m+n) a, & & (m+n) x - n a & , \\ (m+n) d x - d m a & , & -(m+n)(1+d) x + (m+n) a, & \\ 0 & , & (m+n) d x - d m a & \\ (m+n) y - m b & , & 0 & \\ -(m+n)(1+d) y + d (m b + n c), & & (m+n) y - n c & \\ (m+n) d y - d n c & , & -(m+n)(1+d) y + d (m b + n c) & \\ 0 & , & (m+n) d y - d n c & \end{vmatrix} = 0$$

Durch einige einfache Umformungen lässt sich derselben die Form geben

$$\begin{vmatrix} (m+n) x - n a, & 0 & , (m+n) y - m b, & 0 \\ 0 & , a & , 0 & , -b \\ a n (d-1) & , a (n - m d) & , n c (1-d) & , m b d - n c \\ a (m-n) & , (m+n) x - m a, & n c - m b & , (m+n) y - n c \end{vmatrix} = 0$$

und durch Zerlegung in vier Unterdeterminanten folgende

$$a \left[(m+n) x - n a\right] \begin{vmatrix} n c (1-d), & m b d - n c \\ n c - m b & , (m+n) y - n c \end{vmatrix}$$

$$-b \left[(m+n) x - n a\right] \begin{vmatrix} a (n - m d) & , n c (1-d) \\ (m+n) x - m a, & n c - m b \end{vmatrix}$$

$$-a\left[(m+n)y-mb\right]\begin{vmatrix} an(d-1), & mbd-nc \\ a(m-n), & (m+n)y-nc \end{vmatrix}$$

$$-b\left[(m+n)y-mb\right]\begin{vmatrix} an(d-1), & a(n-md) \\ a(m-n), & (m+n)x-ma \end{vmatrix}$$

sodass sie also gleich wird dem Ausdruck

$$\triangle_1+\triangle_2+\triangle_3+\triangle_4$$

wenn

$$\triangle_1=\begin{vmatrix} nc(1-d)\left[(m+n)x-na\right], & (mbd-nc)a \\ (nc-mb)\left[(m+n)x-na\right], & \left[(m+n)y-nc\right]a \end{vmatrix}$$

$$\triangle_2=\begin{vmatrix} nc(1-d)\left[(m+n)x-na\right], & a(n-md)b \\ (nc-mb)\left[(m+n)x-na\right], & \left[(m+n)x-ma\right]b \end{vmatrix}$$

$$\triangle_3=-\begin{vmatrix} an(1-d)\left[(m+n)y-mb\right], & \left[mbd-nc\right]a \\ a(m-n)\left[(m+n)y-mb\right], & \left[(m+n)y-nc\right]a \end{vmatrix}$$

$$\triangle_4=-\begin{vmatrix} an(d-1)b\left[(m+n)y-mb\right], & a(n-md) \\ ab(m-n)\left[(m+n)y-mb\right], & (m+n)x-ma \end{vmatrix}$$

Vereinigt man nun $\triangle_1$ mit $\triangle_3$ und $\triangle_2$ mit $\triangle_4$, so erhält man

$$\begin{vmatrix} n(1-d)\left[(m+n)xc-nac\right]+\left[a(m+n)y-amb\right], & (mbd-nc)a \\ (nc-mb)\left[(m+n)x-na\right]-a(m-n)\left[(m+n)y-mb\right], & \left[(m+n)y-nc\right]a \end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix} n(1-d)\left[\left[(m+n)cx-nac\right]+\left[a(m+n)y-amb\right]\right], & a(n-md)b \\ (nc-mb)\left[(m+n)x-na\right]-a(m-n)\left[(m+n)y-mb\right], & \left[(m+n)-ma\right]b \end{vmatrix}=0$$

Dies gibt dann sofort

$$\begin{vmatrix} n\left[(m+n)xc+a(m+n)y-a(mb+nc)+a(m+n)y\right], & \\ (nc-mb)\left[(m+n)x-na\right]-a(m-n)\left[(m+n)y-mb\right], & \\ \dfrac{an(b-c)}{1-d} & \\ b(m+n)x+a(m+n)y-a(nc+mb) & \end{vmatrix}=0$$

und schliesslich

$$\begin{vmatrix} \frac{x}{a}+\frac{y}{c}-\frac{c(m-n)-d(mb+nc)}{(1-d)(m+n)c}, & \frac{b-c}{(1-d)(m+n)c} \\ -\frac{dmn(b-c)}{(1-d)(m+n)c}, & \frac{x}{a}+\frac{y}{b}-\frac{b(m+n)-d(mb+nc)}{(1-d)(m+n)b} \end{vmatrix} = 0$$

eine Gleichung von der Form $XY = const$, die eine Hyperbel bezogen auf ihre Asymptoten darstellt. Letztere sind, wie aus ihrem Ausdruck sofort zu erkennen, den festen Tangenten parallel.

Als Coordinaten ihres Mittelpunktes finden wir $x = \frac{a}{1-d}$

$$y = -\frac{(mb+nc)d}{(1-d)(m+n)}$$

Wir sehen also, dass x von dem Verhältniss $m:n$ unabhängig ist, dass mithin die Mittelpunkte aller dieser Hyperbeln, welche durch irgend welche Theilung des Tangentenabschnittes erhalten werden, auf einer zur YAxe parallelen Graden liegen, die von dieser die constante Entfernung $\frac{a}{1-d}$ hat. Dieselbe Entfernung hat aber auch der Mittelpunkt des erzeugenden Kegelschnitts von der YAxe, dessen Gleichung zu dem Ende erst gebildet werden muss. Die Tangente, die die Punkte $\xi_1 \eta_1$ und $\xi_3 \eta_3$ verbindet, hat die Gleichung

$$(\eta_1 - \eta_3)x - (\xi_3 - \xi_1)y + \xi_1\eta_3 - \xi_3\eta_1 = 0$$

Setzt man für ξ_1, η_1 und ξ_3, η_3 die oben (p. 8) gesuchten Werthe ein und bedenkt, das $\lambda_1\lambda_3 = d$ ist, so erhält man eine in λ quadratische Gleichung, die d enthält. Mit einigen Umformungen kann man sie auf die Form bringen

$$\lambda^2\left[(y_2-y_1)x + (x_1-x_2)y - (x_1y_2 - x_2y_1)\frac{2}{d}\right]$$
$$-2\lambda\left[(y_1-y_3)x - (x_1-x_3)y + (x_1y_3 - x_3y_1)\right]$$
$$+\left[(y_3-y_2)x - (x_3-x_2)y + (x_3y_2 - x_2y_3)\right]2 = 0$$

Führt man dann wieder die einfachen Coordinaten $(0, b)$, $(0, c)$, (a, o) ein, so erhält man in bekannter Weise als Gleichung des erzeugenden Kegelschnitts

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}-1\right)\left(\frac{x}{a}+\frac{c}{c}-1\right) = -\frac{(b-c)^2 d}{4a^2bc}x^2$$

und als Coordinaten des Mittelpunktes findet man

$$x = \frac{a}{1-d}, \quad y = -\frac{d(b+c)}{1-d}$$

Der Mittelpunkt des erzeugenden und des erzeugten Kegelschnitts liegen also auf derselben zur YAxe parallelen Graden. Eliminirt man aus den Gleichungen für die Coordinaten des Mittelpunkts des gegebenen Kegelschnitts d, so erhält man

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b+c}-1 = 0;$$ eliminirt man ebenso d aus den

Coordinaten des Mittelpunkts des gefundenen Kegelschnitts, so erhält man

$$\frac{x}{a}+\frac{y(m+n)}{mb+nc}-1=0$$

Die Mittelpunkte beider Schaaren von Kegelschnitten bewegen sich also jede auf einer Graden, welche durch den Schnittpunkt der beiden Tangenten gehen.

Fällt nun der Mittelpunkt des gegebenen Kegelschnittes ins Unendliche, d. h. ist der Kegelschnitt eine Parabel, so wird dnrch die Theilung des Tangentenabschnittes ebenfalls eine Parabel erzeugt und nicht, wie in allen andern Fällen eine Hyperbel, da ja, wie eben dargethan, dann auch der Mittelpunkt der erzeugten Hyperbel ins Unendliche fällt, die Hyperbel also in eine Parabel übergeht. In diesem Falle ergiebt sich aus

$$x=\frac{a}{1-d}=\infty \quad d=1.$$

Bei der Herleitung der Gleichung des erzeugten Kegelschnitts in Liniencoordinaten hatte sich ergeben, dass sämmtliche Kegelschnitte, welche durch die Theilung entstehen, welches auch die Art des erzeugenden Kegelschnitts sei, bei gleichbleibender Theilung durch zwei feste Punkte des Tangentenpaares gehen. Auch diese Relation lässt sich leicht aus der gefundenen Gleichung in Punktcoordinaten darthun.

Die Gleichung des erzeugten Kegelschnitts lautete

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{c}-\frac{c(m+n)-d(mb+nc)}{(1-d)(m+n)c}\right)\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}-\frac{b(m+n)-d(mb+nc)}{(1-d)(m+n)b}\right)+\frac{dmn(b-c)^2}{(1-d)^2(m+n)^2bc}=0$$

Derselben kann auch die Form gegeben werden

$$\left[\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}-1\right)+\frac{dm(b-c)}{c(1-d)(m+n)}\right]\left[\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{c}-1\right)+\frac{dn(c-b)}{b(1-d)(m+n)}\right]+\frac{dmn(b-c)^2}{bc(1-d)^2(m+n)^2}=0$$

Nach einigen Umformungen erhält man

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}-1\right)\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{c}-1\right)+\frac{d(b-c)}{bc(1-d)(m+n)}\left\{\frac{x}{a}(mb-nc)+y(m-n)-\frac{m^2b-n^2c}{m+n}\right\}=0$$

Die Gleichung der Hyperbel stellt sich also dar zusammengesetzt aus der Gleichung des gegebenen Tangentenpaares und der Gleichung einer graden Linie

$$\frac{x}{a}(mb-nc)+y(m-n)-\frac{m^2b-n^2c}{(m+n)}=0$$

Die Schnittpunkte beider sind mithin Punkte des entstehenden Kegelschnitts. Da nun die Gleichung der Graden nicht d enthält, also von der besondern Art des Kegelschnitts unabhängig ist, so gehen bei gleichbleibender Theilung sämmtliche entstehende Hyperbeln durch zwei bestimmte Punkte der festen Tangenten, dasselbe Resultat, welches wir auch schon oben (p. 8) gefunden hatten.

Noch in anderer Weise lassen sich die Relationen zwischen dem Kegelschnitt in doppelter Berührung und dem durch Theilung der beweglichen Tangenten entstandenen aussprechen. Bekanntlich*) spannt das zwischen zwei festen Tangenten gelegene Stück

*) Vgl. Salmon Art. 310. Aufs. 6.

der Tangente eines Kegelschnitts im Brennpunkte desselben einen Winkel von constanter Grösse. Dreht man mithin um einen festen Punkt einen Winkel, so hüllen die Verbindungslinien der Schnittpunkte der Schenkel dieses Winkels mit zwei festen Graden einen Kugelschnitt ein, theilt man aber das Stück der Verbindungslinie zwischen den beiden festen Graden in einem constanten Verhältniss, so ist der Ort der Theilpunkte eine Hyperbel.

Den sämmtlichen Resultaten entsprechen nun vermöge der die ganze Geometrie beherrschenden Dualität Parallelsätze, von denen ich hier nur den hauptsächlichsten anführe: Werden zwei feste Punkte eines Kegelschnitts mit einem beliebigen Peripheriepunkte verbunden und die entstehenden Winkel in einem bestimmten Sinusverhältniss getheilt, dann umhüllen die Theillinien einen Kegelschnitt.

Man könnte nun die Betrachtung noch erweitern, indem man statt der unendlich entfernten Graden eine feste Grade nähme und statt der einfachen Theilung ein constantes Doppelverhältniss festsetzte. Man würde dann finden*): »Wenn eine veränderliche Tangente eines Kegelschnitts zwei feste Tangenten in T und T^1 und eine feste grade Linie in M schneidet, und ein Punkt P in ihr so bestimmt wird, dass das Doppelverhältniss $(PTMT^1)$ constant ist, so ist der Ort des Punktes P ein Kegelschnitt, welcher durch die Punkte geht, in denen die festen Tangenten die feste grade Linie schneiden.« Doch würde die Herleitung dieses Satzes zu so weitläufigen Rechnungsoperationen führen, dass ich an dieser Stelle davon absehen muss, zudem, wenn wirklich Gleichungen aufgestellt würden, die daraus herzuleitenden Resultate und Folgerungen doch nur der Art wären, dass sie aus dem Vorhergehenden durch projectivische Erweiterungen entnommen werden könnte.

Eine in anderer Richtung sich bewegende Erweiterung des im Anfang angeführten Apollonischen Problems über die Asymptoten gab Newton in seiner Enumeratio linearum tertii ordinis: »Wenn eine Curve eben so viele Asymptoten hat, als Einheiten in dem Grad ihrer Gleichung enthalten sind, und man zieht in beliebiger Richtung eine Transversale, so wird der Mittelpunkt der mittlern Entfernungen der Punkte, in welchen diese die Asymptoten trifft, derselbe sein, als der der Punkte, in welchem sie die Curve trifft. Oder in andern Worten: Die Summe der Segmente, welche zwischen jedem Ast der Curve und der zugehörigen Asymptote begriffen sind, wird auf beiden Seiten des zur Transversale conjugirten Durchmessers dieselbe sein.« Auch dieser Satz hat eine Verallgemeinerung erfahren, welche uns ihm durch Perspective hergeleitet werden kann; sie ist Maclaurin zu verdanken und findet sich in dessen Schrift: De linearum geometricarum proprietatibus generalibus tractatus. »Wenn man durch einen in der Ebene einer geometrischen Curve liegenden festen Punkt eine Transversale zieht, welche die Curve in so vielen Punkten trifft, als sie Dimensionen hat, darauf in diesen Punkten Tangenten an die Curve zieht, und endlich durch den festen Punkt eine zweite Grade in willkührlicher Richtung, die aber unverändert bleibt, legt, so wird von den Segmenten, welche auf dieser Geraden zwischen dem festen Punkt und allen Tangenten der Curve

*) Vgl. Salmon Art. 421. 7.

liegen, die Summe ihrer inversen Werthe constant sein, welches auch die durch den festen Punkt gezogene erste Transversale sein mag; und zwar wird diese Summe gleich der der inversen Werthe aller Segmente, die auf derselben unveränderlichen Geraden zwischen dem festen Punkt und den Durchschnittspunkten dieser Geraden mit der Curve liegen.« Beide Sätze führt auch Chasles in seiner Geschichte der Geometrie an. Nachdem derselbe noch Verallgemeinerungen anderer bekannten Probleme gegeben hat, sagt er: »Und es ist immer von Nutzen, die geometrischen Wahrheiten zu betrachten in ihrer grössten Ausdehnung, in ihrer grössten Allgemeinheit, in ihrer, so zu sagen, grössten Annäherung an die höchsten Gesetze, deren Aufsuchung beständiger Zweck bei den Anstrengungen der Geometer sein muss. Sie sind, in diesem Zustand der Allgemeinheit, Verhältnisse und Analogien, welche man nicht in ihren Corrollarien findet und welche die Verkettung zeigen und dazu dienen, sich immer höher zu erheben und allgemeine Principien zu entdecken, deren Spuren verwischt oder unbemerkt geblieben sind in den mehr umschriebenen oder mehr particulären Sätzen. Denn,« fährt er an einem späteren Orte fort, »in dem Zustande, zu welchem die Geometrie gekommen ist, ist die Verallgemeinerung das geeignetste Mittel, uns zu neuen Fortschritten und zu neuen Entdeckungen zu führen. Diese Art des Verfahrens bei dem Studium der Wissenschaft muss die Arbeiten des Geometers leiten.«